МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Вычислительная техника»

Контрольная работа №2

По дисциплине: «Дискретная математика»

«Теория графов»

Вариант № 46

Выполнил:

Студент группы ИВТ-161

Плотников Е.В

Проверила:

Приходькова И.В

Волгоград 2023г

**Задание:**

Изображение выглядит как небо, усевшийся, линия, штриховой рисунок

Автоматически созданное описание

1. Определить, является ли данный граф:  
   • орграфом или неорграфом или смешанным (обосновать ответ и  
   выполнить обратное преобразование);  
   • псевдографом или мультиграфом, или простым графом (обосновать  
   ответ и выполнить необходимые преобразования).  
   • связан или не связан или сильно связан (обосновать ответ и  
   выполнить обратное преобразование);  
   • планарным или плоским графом (обосновать ответ и выполнить  
   обратное преобразование);  
   • двудольным графом (обосновать ответ по критерию двудольности и,  
   если необходимо, то достроить до двудольного графа);  
   • деревом (обосновать ответ и, в случае циклического графа, привести  
   один из вариантов остовного дерева).
2. Задать граф перечислением вершин (узлов) и ребер (дуг),  
   матрицей инцидентности, матрицей смежности.
3. Определить следующие основные характеристики графа: число  
   ребер, число дуг, число вершин, коэффициент связности графа, степени  
   всех вершин графа (с определением максимального значения и проверкой  
   правильности по лемме о рукопожатиях), цикломатическое число графа  
   (по рисунку, а также по формуле), число компонент связности. Найти  
   метрические характеристики графа.
4. Произвести вершинную и реберную раскраску графа с  
   определением вершинного и реберного хроматического чисел. Провести:  
   оценку сверху по неравенству, оценку снизу по неравенству, анализ на  
   бихроматичность (используя алгоритм поиска в ширину).
5. Определить, является ли данный граф эйлеровым? Обосновать  
   ответ. Указать, есть ли эйлеров цикл (применить алгоритм Флери для его  
   определения).  
   При получении отрицательного ответа на данный вопрос  
   необходимо, применяя минимальное количество известных операций на  
   графах, преобразовать данный граф до эйлерова.
6. Определить, является ли данный граф гамильтоновым?  
   Обосновать ответ. Указать, есть ли гамильтонов цикл, цепь.  
   При получении отрицательного ответа на данный вопрос  
   необходимо, применяя минимальное количество известных операций на  
   графах, преобразовать данный граф до гамильтонова.
7. Провести топологическую декомпозицию графа. Определить  
   сильносвязные подграфы и представить их в виде входных, транзитных и  
   выходных блоков.
8. С помощью алгоритма выделения минимального остовного дерева  
   получить остов.
9. Упорядочить граф методами Фалкерсона и матричным. Построить  
   порядковую функцию. Построить функцию Гранди.
10. С помощью метода Магу определить вершинную  
    независимость (внутреннюю устойчивость: максимальную,  
    минимальную) и доминирование (внешнюю устойчивость:  
    максимальную, минимальную). Определить ядро графа.

Задание 1.

1. Смешанный граф – есть ребра и дуги
2. Преобразуем в орграф, заменив ребра дугами
3. Преобразуем в неорграф, заменив дуги ребрами + удалить петли и удалить кратные связи (обр дуги)
4. Псевдограф, если есть петли и кратные связи
5. Мультиграф, если есть кратные, но нет петель
6. Связный, если есть дрога между любыми Хi и Xj
7. Плоский граф, если ребро пересекает дугу, иначе - планарный
8. Раскрашиваем от х1 по вершинам, если есть разбиение на Х0 и Х1 и нет связей внутри групп
9. Считаем простые циклы, если есть нечетные, то преобразуем в двудольный путем разбиения нечет связей.
10. Если не двудольный, то не является деревом. Если дерево, то строим его.

**Задание 2.**

Задать граф перечислением вершин (узлов) и ребер (дуг), матрицей инцидентности, матрицей смежности.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

**Задание графа G перечислением:**

* Множество вершин: X = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10}.
* Множество дуг V1 = {(x4, x4), (x5, x8), (x6, x7), (x7, x9), (x3, x10), (x10, x9),

(x10, x3)}

* Множество ребер V2 = {(x1, x2), (x2, x3), (x3, x4), (x1, x4), (x4, x5), (x4, x6),

(x6, x8), (x8, x10), (x8, x9), (x7, x8), (x5, x7)}

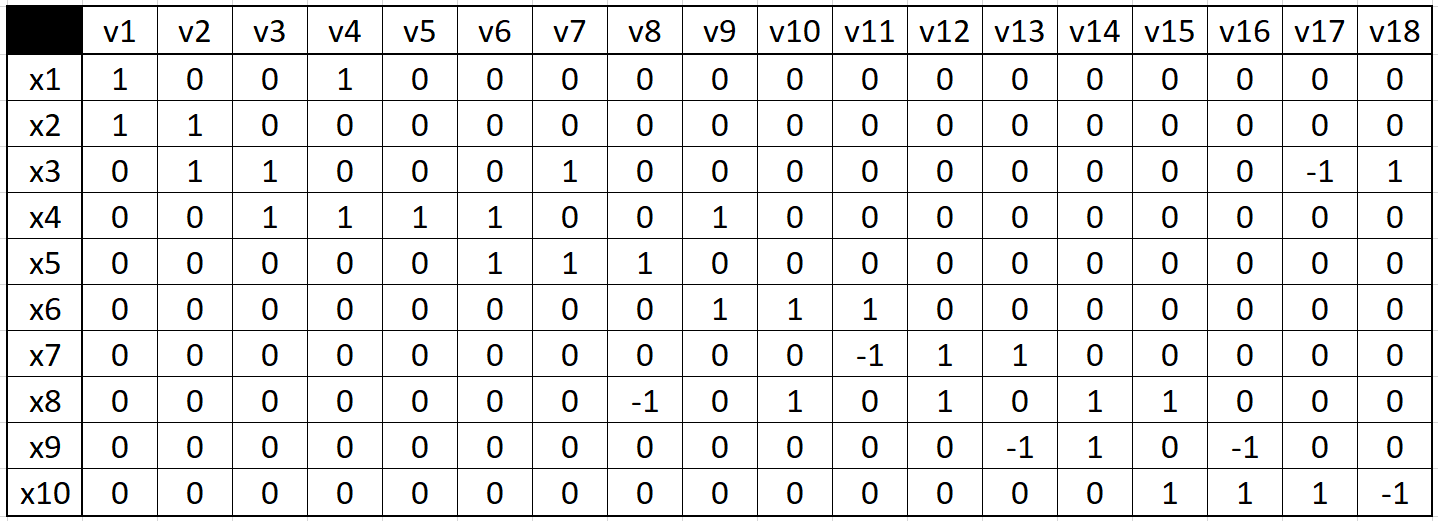
* Список изолированных вершин = ∅ Ø

**Матрицу смежности A(G):**

Изображение выглядит как текст, стол

Автоматически созданное описание

**Матрица инцидентности B(G):**

****

**Задание 3.**

Определить следующие основные характеристики графа: число  
ребер, число дуг, число вершин, коэффициент связности графа, степени  
всех вершин графа (с определением максимального значения и проверкой  
правильности по лемме о рукопожатиях), цикломатическое число графа  
(по рисунку, а также по формуле), число компонент связности. Найти  
метрические характеристики графа.

**Определим следующие основные характеристики графа:**

* Число ребер: m1 = 11;
* Число дуг: m2 = 7;
* Количество связей: m = m1+m2 = 11+ 7 = 18.
* Число вершин: n = 10;
* Коэффициент связности графа: k = 1;
* Степени всех вершин графа:

**Составим таблицу степеней и полу-степеней всех вершин графа:**

**Изображение выглядит как стол, календарь

Автоматически созданное описание**

Максимальное значение Δ = 6.

**Вычислим сумму всех степеней и проверим значение по теореме о**

**рукопожатиях:**

P(x1) + P(x2) + P(x3) + P(x4) + P(x5) + P(x6) + P(x7) + P(x8) + P(x9) + P(x10) =

= 2 + 2 + 5 + 6 + 3 + 3 + 3 + 5 + 3 + 4 =36.

По теореме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин в графе равна

2\*m, где m – количество связей в графе. Таким образом сумма степеней по

теореме о рукопожатиях будет равна 2 \* m = 2 \* 18 = 36.

Следовательно, все произведенные вычисления сделаны корректно.

* Цикломатическое число графа:

Определим цикломатическое число по формуле C = m – n + k, где m – число связей графа, n – число вершин графа, k – компонент связности. Таким образом C = m – n + k = 18 – 10 + 1 = 9.

**Найдем цикломатическое число графа графическим методом:**

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. С1: x4v5x4 d(C1) = 1 – удалим v5
2. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С2: x4v4x1v1x2v2x3v3x4 d(C2) = 4 – удалим v1

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С3: x4v3x3v7x5v6x4 d(C3) = 3 – удалим v3

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С4: x4v6x5v8x8v10x6v9x4 d(C4) = 4 – удалим v9

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С5: x6v10x8v12x7v11x6 d(C5) = 3 – удалим v10

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С6: x7v12x8v14x9v13x7 d(C6) = 3 – удалим v13

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С7: x8v14x9v16x10v15x8 d(C7) = 3 – удалим v16

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С8: x8v15x10v17x3v7x5v8x8 d(C8) = 4 – удалим v7

1. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С9: x3v17x10v18 d(C9) = 2 – удалим v17

1. Получаем ациклический граф (дерево):

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

С = 9.

* Число компонент связности: k = 1.
* Метрические характеристики графа:

1. Определим расстояние между всеми парами вершин:

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

1. Определим диаметр как d(G) = max d(xi, xj): d(G) = 4.
2. Определим эксцентриситет каждой вершины:

r(x1) = 4; r(x2) = 4; r(x3) = 3; r(x4) = 3; r(x5) = 4; r(x6) = 3; r(x7) = 4; r(x8) = 3;

r(x9) = 4; r(x10) = 3.

1. Определим радиус графа как r(G) = min r(xi): r(G) = 3;
2. Определим центральные вершины: { x3, x4, x6, x8, x10}.

**Задание 4.**

Произвести вершинную и реберную раскраску графа с  
определением вершинного и реберного хроматического чисел. Провести:  
оценку сверху по неравенству, оценку снизу по неравенству, анализ на  
бихроматичность (используя алгоритм поиска в ширину).

* **Выполним вершинную раскраску графа:**

**Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание**

1. **Хроматическое число χ(G)=3;**
2. **Цветные классы: X=X1 ∪ X2 ∪ X3**

**X1 = {x8, x4, x2}**

**X2 = {x1, x5, x7, x10}**

**X3 = {x3, x6, x9}**

1. **Оценка сверху:**

**χ (G) <= ∆ +1**

**χ (G) <= 4**

1. **Оценка снизу:**

**χ (G) != 1 ➔ граф не пустой**

**χ (G) != 2 ➔ граф не двудольный**

**χ (G) > 2 ➔ граф не дерево**

**2 < χ(G) ≤ 4 ➔ Хроматическое число χ(G)=3, найдено верно**

* **Выполним реберную раскраску графа:**

**Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание**

1. **Хроматическое число χ’(G)=5;**
2. **Цветные классы: V=V1V2V3V4V5;**

**V1 = {(x1, x2), (x4, x6), (x5, x8), (x7, x9), (x3, x10)}**

**V2 = {(x3, x5), (x6, x8), (x10, x9), (x4, x4)}**

**V3 = {(x4, x5), (x10, x3), (x8, x7)}**

**V4 = {(x4, x3), (x8, x9), (x6, x7)}**

**V5 = {(x4, x1), (x3, x2), (x8, x10)}**

1. **Оценка реберного числа:**

**∆ ≤ χ '(G) ≤ ∆ + 1**

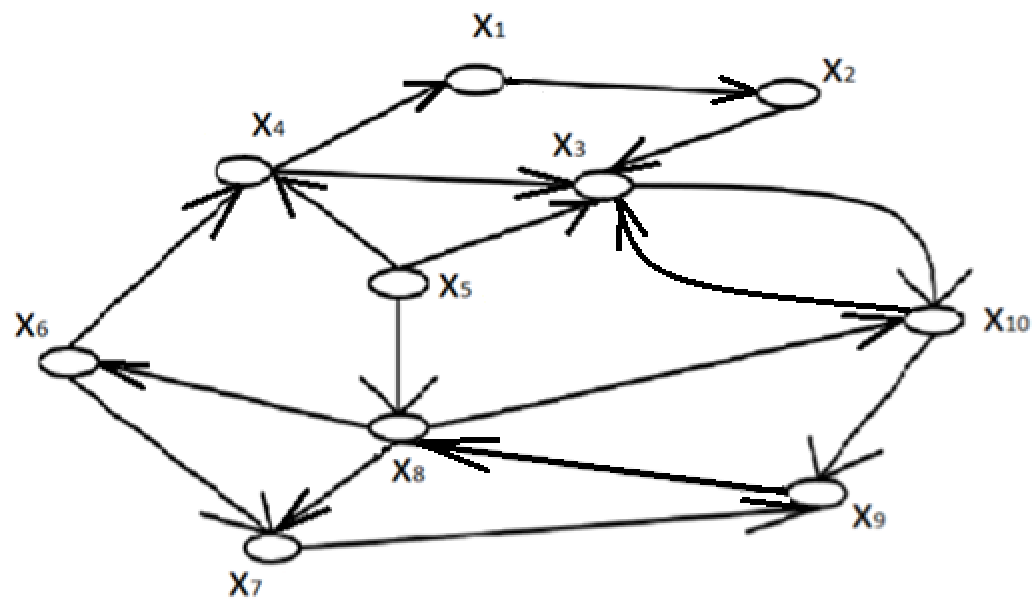
**5 ≤ χ '(G) ≤ 6 ➔ Хроматическое число χ’(G)=5, найдено верно**

**Задание 5.**

Определить, является ли данный граф эйлеровым? Обосновать  
ответ. Указать, есть ли эйлеров цикл (применить алгоритм Флери для его  
определения).

При получении отрицательного ответа на данный вопрос  
необходимо, применяя минимальное количество известных операций на  
графах, преобразовать данный граф до эйлерова.

**Так как исходный граф является смешанным, то выполним его преобразование в ориентированный граф:**



* Для определения наличия эйлерова цикла воспользуемся теоремой:

***Ориентированный граф имеет замкнутую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда: 1) Он является связным; 2) Степень исхода и степень захода каждой вершины равны между собой.***

1. Данный граф является слабо связным, т.к невозможно попасть в вершину х5.
2. Составим таблицу степеней и полу-степеней всех вершин графа:

Изображение выглядит как текст, стена, зеленый, день

Автоматически созданное описание

Как можно заметить из таблицы, у вершин х3, х5, х6, х7, х8, х9 полу-степень исхода не равна полу-степени захода => **Граф не содержит эйлеровый цикл и не является Эйлеровым.**

* **Преобразуем граф минимальным количеством операций, чтобы он содержал эйлеров цикл:**

1. Удалим дугу (х10, х3);
2. Удалим дугу (х6, х7);
3. Добавим дугу (х9, х5);
4. Удалим дугу (х5, х3);
5. Добавим дугу (х3, х5);

* **Получаем следующий граф:**

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

* **Составим таблицу степеней и полу-степеней всех вершин графа**:

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

**Построим эйлеров цикл в преобразованном графе используя алгоритм Флёри:**

1. Выбираем вершину x1. Из вершины x1 выходит 1 дуга: v1

Выбираем v1, присваиваем ей номер 1 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x2. Из вершины x2 выходит 1 дуга: v2

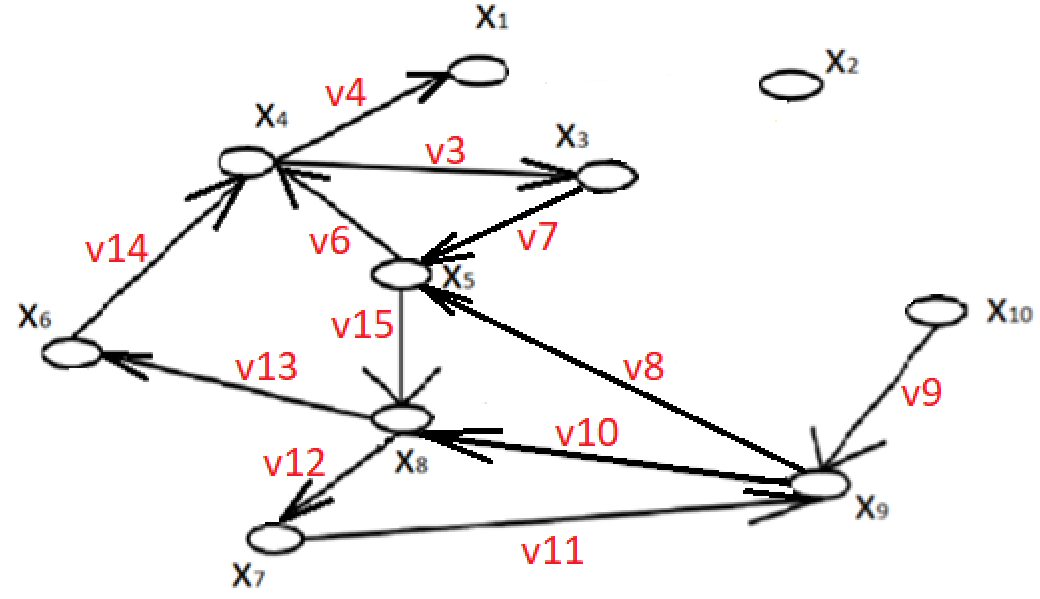
Выбираем v2, присваиваем ей номер 2 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x3. Из вершины x3 выходит 2 дуги: v7, v5

Выбираем v5, присваиваем ей номер 3 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.



1. Выбираем вершину x10. Из вершины x10 выходит 1 дуга: v9

Выбираем v9, присваиваем ей номер 4 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x9. Из вершины x9 выходит 2 дуги: v8, v10

Выбираем v8, присваиваем ей номер 5 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x5. Из вершины x5 выходит 2 дуги: v6, v15

Выбираем v15, присваиваем ей номер 6 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x8. Из вершины x8 выходит 2 дуги: v12, v13

Выбираем v12, присваиваем ей номер 7 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x7. Из вершины x7 выходит 1 дуга: v11

Выбираем v11, присваиваем ей номер 8 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x9. Из вершины x9 выходит 1 дуга: v10

Выбираем v10, присваиваем ей номер 9 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x8. Из вершины x8 выходит 1 дуга: v13

Выбираем v13, присваиваем ей номер 10 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x6. Из вершины x6 выходит 1 дуга: v14

Выбираем v14, присваиваем ей номер 11 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x4. Из вершины x4 выходит 2 дуги: v3, v4

Выбираем v3, присваиваем ей номер 12 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x3. Из вершины x3 выходит 1 дуга: v7

Выбираем v7, присваиваем ей номер 13 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x5. Из вершины x5 выходит 1 дуга: v6

Выбираем v6, присваиваем ей номер 14 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину x4. Из вершины x4 выходит 1 дуга: v4

Выбираем v4, присваиваем ей номер 15 и удаляем из дальнейшего рассмотрения.

Изображение выглядит как календарь

Автоматически созданное описание

**Эйлеров цикл: x1-x2-x3-x10-x9-x5-x8-x7-x9-x8-x6-x4-x3-x5-x4-x1**

**Задание 6.**

Определить, является ли данный граф гамильтоновым?  
Обосновать ответ. Указать, есть ли гамильтонов цикл, цепь.  
При получении отрицательного ответа на данный вопрос  
необходимо, применяя минимальное количество известных операций на  
графах, преобразовать данный граф до гамильтонова.

**Данный граф не является гамильтоновым, в нем нет гамильтонова цикла**

**Добавим дугу (х9, х10):**

**Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание**

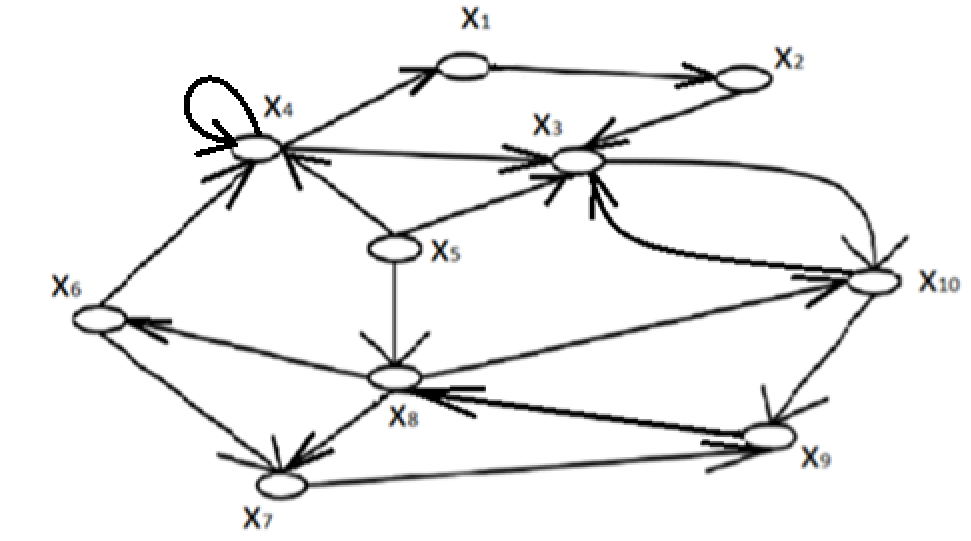
**Гамильтонов цикл: х3-x2-x1-x4-x5-х8-x6-x7-x9-x10-x3**

**Гамильтонова цепь: х3-x2-x1-x4-x5-х8-x6-x7-x9-x10**

**Задание 7.**

Провести топологическую декомпозицию графа. Определить  
сильносвязные подграфы и представить их в виде входных, транзитных и  
выходных блоков.

Так как граф является смешанным. То необходимо его привести к ориентированному.

****

**Задание 8.**

С помощью алгоритма выделения минимального остовного дерева (МОД) получить остов.

Изображение выглядит как небо, усевшийся, линия, штриховой рисунок

Автоматически созданное описание

Так как данный граф содержит петли для выполнения задания необходимо, чтобы граф был неориентированным, взвешенным или нагруженным, связным, простым, без кратных связей, его необходимо преобразовать.

После преобразований получаем следующий граф:

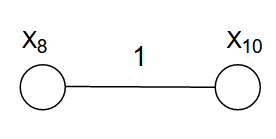
Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем ребро минимального веса Х8Х10:

n=10

i=2 Х8 - корень



Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х8 Х5); d(Х8 Х6); d(Х8 Х7); d(Х8 Х9); d(Х10Х3); d(Х10 Х9)}=

= min {2; 6; 4; 7; 8; 3}= 2 => Х8 Х5

Добавляем вершину Х5.

1. n=10

i=3

Изображение выглядит как текст, часы

Автоматически созданное описание

Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х5Х4); d(Х5Х3); d(Х8 Х6); d(Х8 Х7); d(Х8 Х9); d(Х10Х3); d(Х10 Х9)}=

= min {3; 10; 6; 4; 7; 8; 3}= 3 => Х10 Х9

Добавляем вершину Х9.

1. n=10

i=4

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х5Х4); d(Х5Х3); d(Х8 Х6); d(Х8 Х7); d(Х10Х3); d(Х9 Х7)}=

= min {3; 10; 6; 4; 8; 5}= 3 => Х5 Х4

Добавляем вершину Х4.

1. n=10

i=5

Изображение выглядит как текст, часы

Автоматически созданное описание

Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х4Х1); d(Х4Х6); d(Х4Х3); d(Х5Х3); d(Х8 Х6); d(Х8 Х7); d(Х10Х3);

d(Х9 Х7)}= min {7; 5; 9; 10; 6; 4; 8; 5}= 4 => Х8 Х7

Добавляем вершину Х7.

1. n=10

i=6

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

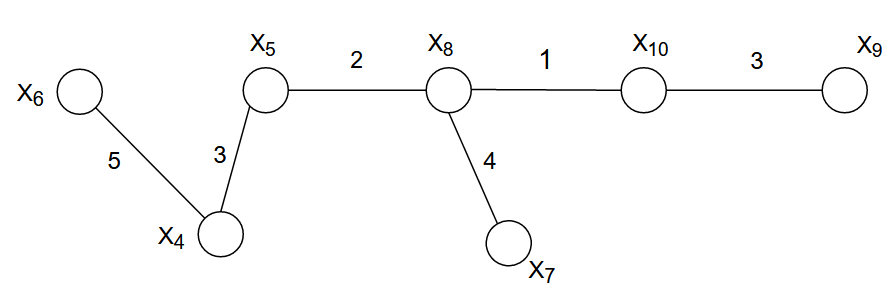
Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х4Х1); d(Х4Х6); d(Х4Х3); d(Х5Х3); d(Х8 Х6); d(Х7 Х6); d(Х10Х3)}= min {7; 5; 9; 10; 6; 9; 8}= 5 => Х4 Х6

Добавляем вершину Х6.

1. n=10

i=7



Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х4Х1); d(Х4Х3); d(Х5Х3); d(Х10Х3)}= min {7; 9; 10; 8}= 7 => Х4 Х1

Добавляем вершину Х1.

1. n=10

i=8

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х1Х2); d(Х4Х3); d(Х5Х3); d(Х10Х3)}= min {6; 9; 10; 8}= 6 => Х1 Х2

Добавляем вершину Х2.

1. n=10

i=9

Изображение выглядит как лампа

Автоматически созданное описание

Множество расстояний от дерева до незанятых вершин:

min {d(Х2Х3); d(Х4Х3); d(Х5Х3); d(Х10Х3)}= min {2; 9; 10; 8}= 2 => Х2 Х3

Добавляем вершину Х3.

1. n=10 = 10=i Алгоритм завершён.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

Вес МОД = 2 + 1 + 4 + 3 + 3 +5 + 7 + 6 +2 = 33.

**Задание 9.**

Упорядочить граф методами Фалкерсона и матричным. Построить  
порядковую функцию. Построить функцию Гранди.

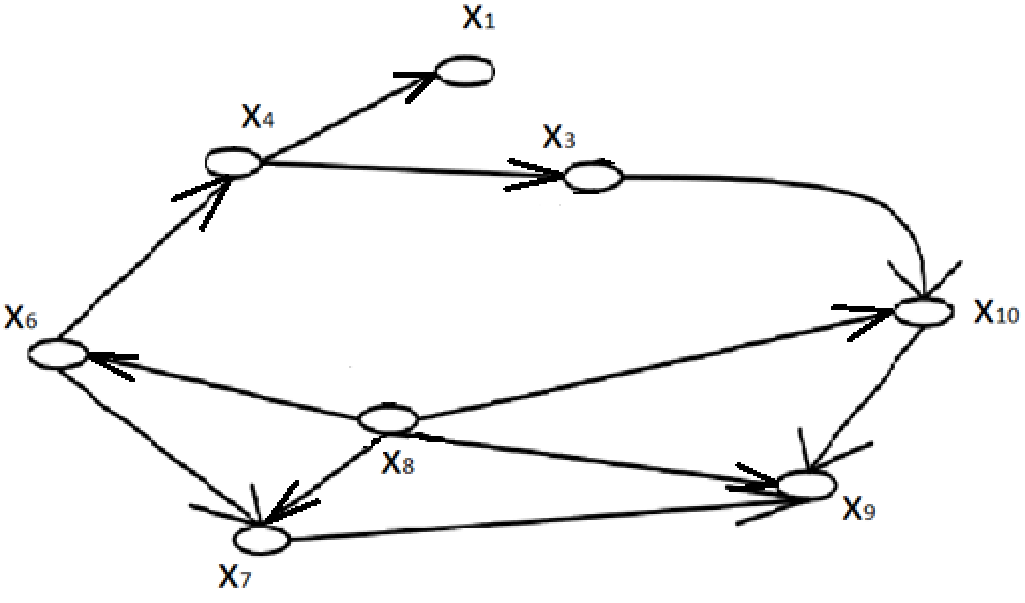
Так как исходный граф содержит петли для выполнения задания необходимо, чтобы граф был ориентированным, связным, его необходимо преобразовать.

**Изображение выглядит как диаграмма

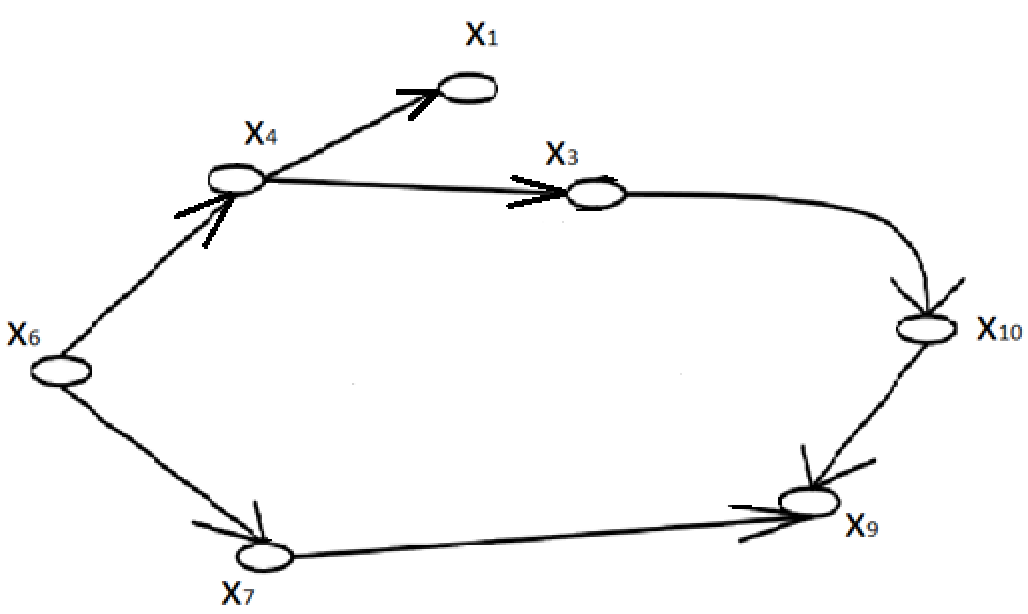
Автоматически созданное описание**

**1.Первый этап:**

1. Выбираем вершины X2 и X5, так как они не содержат входящих связей. Они образуют 1 группу, удаляем их.
2. Получаем следующий граф:



1. Выбираем вершину X8, она образует 2 группу. Удаляем ее.
2. Получаем следующий граф:



1. Выбираем вершину X6, она образует 3 группу. Удаляем ее.
2. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как ветвь

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершины X7 и X4, они образует 4 группу. Удаляем их.
2. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершины X1 и X3, они образует 5 группу. Удаляем их.
2. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

1. Выбираем вершину X10, она образует 6 группу. Удаляем ее.
2. Получаем следующий граф:

Изображение выглядит как логотип

Автоматически созданное описание

1. Выбираем последнею вершины и присваиваем ей 7 группу. Удаляем ее.

**2.Второй этап**

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

Уровни:

|  |  |
| --- | --- |
| O(X9) = 0  O(X10) = 1  O(X3) = 2  O(X1) = 2  O(X4) = 3 | O(X7) = 3  O(X6) = 4  O(X8) = 5  O(X5) = 6  O(X2) = 6 |

**Построим функцию Гранди.**

Уровни:

|  |  |
| --- | --- |
| Q(X9) = 0  Q(X10) = 1  Q(X3) = 0  Q(X1) = 0  Q(X4) = 1 | Q(X7) = 1  Q(X6) = 0  Q(X8) = 2  Q(X5) = 3  Q(X2) = 1 |

**Упорядочим граф матричным способом**

Построим матрицу смежности. Посчитаем кол-во единиц в каждой строке и запишем их кол-во в строку λ0 в соответствующий столбец.

**Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание**

**Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание**

Уровни:

|  |  |
| --- | --- |
| O(X1) = 0  O(X9) = 0  O(X10) = 1  O(X7) = 1  O(X3) = 2 | O(X4) = 3  O(X2) = 3  O(X6) = 4  O(X8) = 5  O(X5) = 6 |

**Задание 10.**